

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
van Liwenagel
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

46e jaargang
1970/1971
no 2
oktober

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Ch. Krijnen - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. D. N. van der Neut - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oestgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 15,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 10,50. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:

Intermedia Groningen N.V., Oude Boteringestraat 22, Groningen, tel. 050-29786-30785.

Evenredigheden

Dr. P. M. VAN HIELE
Voorburg

Vermenigvuldigen in plaats van delen

1 Men is gewoon een evenredigheid te lezen als een gelijkheid van quotiënten: 2 : 5 = 6 : 15. Deze evenredigheid is juist, want $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$.
Deze beschouwingswijze maakt de leer der evenredigheden moeilijker dan wel nodig is. Breuken hebben twee nadelen: 1 het getal in de noemer kan niet gelijk zijn aan nul; 2 het rekenen met breuken is minder eenvoudig dan het rekenen met produkten.
Het kan heel gemakkelijk anders. Verschillende didaktici die zich bezig hielden met het rekenen in het basisonderwijs hebben al een lans gebroken voor het werken met 'verhoudingsblokken'. Men treft deze gedachte o.a. aan bij Drenckhahn in zijn 'Arbeitsbuch für den Rechenunterricht' en bij Turkstra en Timmer in 'Rekendidactiek, 1e deel'. Het komt erop neer, dat men twee rijtjes getallen onder elkaar zet:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 12 & -2 & -5 \\ 6 & 12 & 21 & 36 & -6 & -15 \end{pmatrix}$$

Het tweede rijtje wordt uit het eerste verkregen door alle getallen met eenzelfde getal te vermenigvuldigen.
Het belangrijkste van deze methode is, dat er nergens een bewerkingsteken geplaatst is: de getallen staan in een rechthoekig blok, zij vormen een matrix. Door de bijzondere betrekking die tussen de getallen bestaat, ben ik gewend te spreken van een 'evenredigheidsmatrix'.

De eigenschappen van de evenredigheidsmatrix

2 Om een algemene geldigheid van de eigenschappen te verkrijgen, sluit ik het optreden van het getal nul in de evenredigheidsmatrix uit. Dat kan soms een nadeel zijn, wij zullen straks zien, hoe we het getal nul toch weer kunnen invoeren.
De definitie van evenredigheidsmatrix is dan als volgt:

a We hebben een systeem van n rijen van m getallen die in een blokvorm gerangschikt worden.

b De tweede en volgende rijen worden uit de eerste rij verkregen door met een zeker getal te vermenigvuldigen.
De matrix ziet er dus als volgt uit:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & \dots \\ ka & kb & kc & kd & ke & kf & \dots \\ ma & mb & mc & md & me & mf & \dots \\ \dots & & & & & & \dots \end{pmatrix}$$

$a, b, c, d, e, f, \dots, k, m, \dots$ zijn elementen van $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.
Iedere evenredigheidsmatrix kan naar alle kanten onbeperkt worden voortgezet.

De eerste eigenschap van de evenredigheidsmatrix is:
Iedere evenredigheidsmatrix gaat over in een evenredigheidsmatrix, wanneer men de rijen en de kolommen verwisselt.
Men ziet het dadelijk:

$$\begin{pmatrix} a & ka & ma & \dots \\ b & kb & mb & \dots \\ c & kc & mc & \dots \\ d & kd & md & \dots \\ \dots & & & \dots \end{pmatrix}$$

s een evenredigheidsmatrix.
Men verkrijgt de tweede regel uit de eerste door vermenigvuldiging met b/a, de derde regel uit de eerste door vermenigvuldiging met c/a, enz.

De tweede eigenschap van de evenredigheidsmatrix is:
Men kan iedere rij uit iedere andere rij verkrijgen door met een zeker getal te vermenigvuldigen; men kan iedere kolom uit iedere andere kolom verkrijgen door met een zeker getal te vermenigvuldigen.
Het bewijs kan ik achterwege laten, een kind van het tweede leerjaar kan het vinden.

De derde eigenschap ven de evenredigheidsmatrix is:
Voor iedere vier elementen die op de hoekpunten van een rechthoek in de evenredigheidsmatrix staan, geldt, dat het produkt van de elementen die tot de ene diagonaal van de rechthoek behoren, gelijk is aan het produkt van de elementen die tot de andere diagonaal van de rechthoek behoren.
Een lange zin die men afkort tot: diagonaalprodukten zijn gelijk.

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ ka & \mathbf{kb} & kc & kd & \mathbf{ke} & kf \\ ma & mb & mc & md & me & mf \\ na & \mathbf{nb} & nc & nd & \mathbf{ne} & nf \end{pmatrix}$$

Het is duidelijk: $kb \cdot ne = ke \cdot nb$

De vierde eigenschap van de evenredigheidsmatrix is:
Men kan een evenredigheidsmatrix uitbreiden met een nieuwe rij door p maal de ene rij te vermeerderen met q maal de andere rij (onder voorwaarde, dat er geen nullen optreden).
Een overeenkomstige eigenschap geldt voor de kolommen.
Inderdaad: $(pk+qm)a \quad (pk+qm)b \quad (pk+qm)c \ldots$
kan men als nieuwe rij aan de evenredigheidsmatrix toevoegen.

Het rekenen met evenredigheden

3 Twee getallen verhouden zich als 3 tot 8, hun som is 34. Hoe groot is elk getal?
Noemen we de getallen x en y, dan geldt de evenredigheidsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ x & y \end{pmatrix}$$

of na uitbreiding volgens de vierde eigenschap:

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 11 \\ x & y & 34 \end{pmatrix},$$

waaruit men met behulp van eigenschap 3 berekent: $x = \dfrac{3 \cdot 34}{11}$, $y = \dfrac{8 \cdot 34}{11}$.

2e voorbeeld: Van de getallen x, y, z en t is bekend, dat $x : y = 4 : 7$, $5z = 3t$ en $x = 3z$. Hoe verhouden zich deze getallen?
Opl.: De evenredigheidsmatrix vertelt:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 4 & 7 & .. & .. \\ .. & .. & 3 & 5 \\ 3 & .. & 1 & .. \end{pmatrix}$$

Wij moeten nog enkele open plaatsen opvullen. Het snelst gaat dit met de onderste regel, daar komt op de tweede plaats: $\dfrac{3 \cdot 7}{4}$, op de vierde plaats: $\dfrac{1 \cdot 5}{3}$.

Na invulling en aanvulling komt er dus:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 4 & 7 & .. & .. \\ .. & .. & 3 & 5 \\ 3 & \frac{21}{4} & 1 & \frac{5}{3} \\ 36 & 63 & 12 & 20 \end{pmatrix}$$

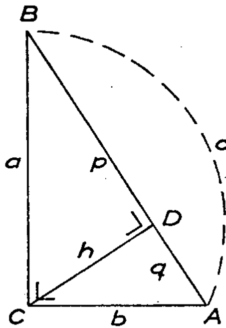
3e voorbeeld: Twee getallen verhouden zich als 2 tot 5, hun produkt is 20. Hoe groot zijn deze getallen?

Opl.: De evenredigheidsmatrix kan als volgt worden opgesteld en aangevuld:

$$\begin{pmatrix} x & 2 & xy & 20 \\ y & 5 & y^2 & y^2 \end{pmatrix}$$

Om plaatsruimte te winnen, kan men x en y ook onder elkaar schrijven.
De regel der diagonaalprodukten vertelt: $2y^2 = 100$, dus $y^2 = 50$
Dus $x = \sqrt{8}$ en $y = \sqrt{50}$ of $x = -\sqrt{8}$ en $y = -\sqrt{50}$.
Het kan natuurlijk ook met $x = 2k$ en $y = 5k$, maar leerlingen kwamen tot deze ook zeer fraaie oplossing.

4[e] voorbeeld: Leid de (tot voor kort) belangrijke formules van de rechthoekige driehoek af.



Opl.:Zie figuur. De driehoeken ABC, ACD en CBD zijn gelijkvormig, dus geldt de evenredigheidsmatrix:

$$\begin{pmatrix} \overline{AB} & \overline{BC} & \overline{CA} \\ \overline{AC} & \overline{CD} & \overline{DA} \\ \overline{CB} & \overline{BD} & \overline{DC} \end{pmatrix}$$

in kleine letters:

$$\begin{pmatrix} c & a & b \\ b & h & q \\ a & p & h \end{pmatrix}$$

De regel der diagonaal produkten vertelt: $a^2 = pc$, $b^2 = qc$, $h^2 = pq$, $ab = hc$.
Door optelling volgens de bekende manier: $a^2+b^2 = c^2$.

De rekenliniaal

4 De belangrijkste eigenschap van de rekenliniaal is, dat in iedere stand van de tong de getallen van de C-schaal met die van de D-schaal een evenredigheidsmatrix vormen. Moet men dus berekenen $x = ab/c$, dan stelt men de evenredigheidsmatrix: $\begin{pmatrix} a & c \\ x & b \end{pmatrix}$ op. Men plaatst het getal c van de C-schaal boven het getal b van de D-schaal. Op de D-schaal leest men het antwoord (x) af onder het getal a van de C-schaal.

Hiermee is ook het vermenigvuldigen en delen opgelost, men heeft immers:
$x = ab = \frac{a \cdot b}{1}$ en $x = \frac{a}{b} = \frac{a \cdot 1}{b}$.

Het berekenen van $x = a \cdot b \cdot c$ gaat als volgt: $x = \frac{a \cdot b}{c^{-1}}$, dus $\begin{pmatrix} a & c^{-1} \\ x & b \end{pmatrix}$ is een evenredigheidsmatrix. Men plaatst het getal c van de CI-schaal boven het getal b van de D-schaal, men leest het antwoord (x) af op de D-schaal, onder het getal a van de C-schaal.

Men berekent $x = \frac{a}{b \cdot c}$ door te schrijven: $x = \frac{a \cdot c^{-1}}{b}$, dus $\begin{pmatrix} b & c^{-1} \\ a & x \end{pmatrix}$ is een evenredigheidsmatrix. Men plaatst de b (C-schaal) boven de a (D-schaal) en leest het antwoord (x) op de D-schaal onder de c (CI-schaal) af.

Men berekent $x = \frac{a\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{c}}$ met behulp van de evenredigheidsmatrix: $\begin{pmatrix} x & a \\ \sqrt[3]{b} & \sqrt[3]{c} \end{pmatrix}$

De derde wortels moeten beide onder geplaatst worden, omdat de K-schaal een vaste schaal is die correspondeert met de D-schaal.
Men plaatst het getal a (C-schaal) onder de b (K-schaal) en leest het antwoord (x) af op de C-schaal onder het getal c van de K-schaal.

Misschien heeft men er bezwaren tegen, dat door het opstellen van evenredigheidsmatrices het automatiseren van de handeling wordt tegengewerkt. De praktijk leert, dat dit automatiseren bij veelvuldig gebruik van de rekenliniaal toch optreedt. Uit de laatste twee voorbeelden ziet men, dat door het met begrip hanteren van de rekenliniaal de souplesse behouden blijft die het mogelijk maakt ook in minder dikwijls voorkomende gevallen toch adequaat te kunnen handelen.

Van evenredigheidsmatrix naar matrix van de rang 1.

5 In de meetkunde moet men zeer dikwijls werken met evenwijdige twee- en driedimensionale vectoren. De richtingsvectoren van een rechte in een plat vlak kan men als volgt in een matrix onderbrengen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \\ ma & mb \end{pmatrix}$$

In dit geval moet men echter ook nullen toelaten. Men kan dit gedaan krijgen door het begrip determinant van de tweede orde in te voeren en de evenredigheidsmatrix te vervangen door een matrix van de rang 1. In plaats van te eisen dat iedere rij uit de eerste kan worden verkregen door met een getal k te vermenigvuldigen, stelt men nu de eis, dat voor iedere onderdeterminant van de

tweede order de diagonaalproduktregel geldt. Dat wil dus zeggen, dat iedere determinant van de tweede orde in de matrix gelijk aan nul is: de matrix is van de rang 1.
Natuurlijk is het mogelijk, dat men vectoren aantreft die niet als richtingsvector kunnen dienen, nulvectoren, Het hangt van het probleem af, dat men bestudeert, of men deze nulvectoren moet verbieden. Als het gaat om een afhankelijk stelsel van twee vectoren bijvoorbeeld, is de nulvector niet uitgesloten. Eist men daarentegen, dat iedere vector van de andere afhankelijk is, dan is de nulvector wel uitgesloten.

Aansluiting bij de wiskunde van de twee hoogste leerjaren

6 In de loop van het derde leerjaar is er gelegenheid determinanten van de tweede orde ook op andere wijze dan in een evenredigheidsmatrix ter sprake te brengen. Men kan namelijk bij de behandeling van twee lineaire vergelijkingen met twee veranderlijken de regel van Cramer leren hanteren. Om te beoordelen of de vergelijkingen afhankelijk zijn, kan men weer op de matrix van de rang 1 terugvallen.
Met het gebruik van de regel van Cramer voor een stelsel van drie lineaire vergelijkingen met drie veranderlijken kan men nog wel even wachten.Het onderwerp is niet erg belangrijk en de oplossing komt ons bij het behandelen van stelsels van driedimensionale vectoren als het ware in de schoot vallen. Wel komt men determinanten van de derde orde eerder tegen, bijvoorbeeld bij de oppervlakte van een driehoek waarvan de coördinaten der hoekpunten gegeven zijn. Ook komt men deze determinant tegen bij de behandeling van het uitprodukt van de vectoren $[a_1, a_2, a_3]$ en $[b_1, b_2, b_3]$ dat men kan schrijven als:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix}$$

Aansluiting van de evenredigheidsmatrices bij de differentiaalrekening krijgt men, wanneer men zich niet te veel bezighoudt met differentiaalquotiënten, maar $[\mathrm{d}x, \mathrm{d}y]$ opvat als de richtingsvector van een raaklijn. Veel behoef ik hier niet over te zeggen, de behandeling loopt vrijwel parallel met de methode die door Drs. L. van den Brom in Euclides IX van de 44e jaargang wordt aanbevolen. Bovendien komt er een dezer dagen een leerboek van ons uit waarin deze methode gebruikt wordt. Wel wil ik er op wijzen, dat het jarenlang omgaan met matrices van de rang 1 een goede training is geweest om met zulke homogene vormen $[\mathrm{d}x, \mathrm{d}y]$ om te gaan.

Werken met groepen
De methode PHILIPS 6 x 6

G. KROOSHOF
Groningen

(Bewerking van een artikel van M. Kerjan in het Franse Bulletin de l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public, 48e jrg. nr. 269—270)

De methode Philips, genoemd naar een Amerikaans socioloog, is een der vormen waarin groepswerk in een klas kan plaats vinden. De Franse schrijver van het artikel hierover in het Bulletin begint dat met een (naar hij toegeeft ietwat overtrokken) karakterisering van het traditionele klassikale onderwijs.
Iedere leerling heeft bij dat systeem zijn vaste plaats, de docent eveneens. Ze bevinden zich als het ware tegenover elkaar, de docent vóór de klas, de leerling 'op zijn plaats'. Om de klassikale les goed te laten functioneren is het gewenst zoveel mogelijk het onderlinge contact tussen de leerlingen te beperken. In feite wordt de klas verhinderd op te treden als groep. Het is een verzameling individuen, die zich stuk voor stuk tegenover de docent bevinden. Deze is als het ware de stralende zon die aller aandacht tot zich trekt, soms ook een dreigende donderwolk.
De situatie van de klassikale les zou gekarakteriseerd kunnen worden door de woorden 'zender' en 'ontvanger'. Men doet zijn best een zo goed mogelijke zend-ontvangsituatie te creëren. Daartoe dienen bijvoorbeeld de ordemaatregelen, de manier van overhoren, het bespreken van de les. Allerlei controlemaatregelen, zoals proefwerken, schriftelijke beurten, examens dienen ertoe te constateren of de zend-ontvangsituatie goed heeft gefunctioneerd.
Natuurlijk, zegt de auteur van het artikel, is de zaak niet zo somber als het op deze manier wel lijkt. Ook wij hebben op deze manier onze opleiding gehad en we hebben er wel wat van opgestoken. Maar nog te vaak wordt gedacht dat deze methode van werken de enig mogelijke is.

Een alternatief voor het streng klassikale systeem is het laten werken in groepen. Bij deze methode krijgt de in de klas 'opgeslagen' energie zijn kans. Het blijkt dat de leerlingen, die enerzijds zich willen gedragen als individualisten het groepswerk bijzonder appreciëren. Hoe kan men dat verklaren? Het optreden als individu en het deelnemen aan groepswerk zijn als het ware twee complementaire verschijnselen: Wie zijn eigen standpunt bevestigd wil zien, heeft er behoefte aan met anderen samen te komen en te discussiëren.
Elke methode die beantwoordt aan deze dubbele behoefte van de leerlingen, wordt door de schrijver 'actieve methode' genoemd.

Een actieve methode is gebaseerd op de volgende twee axioma's:

1 leren is een actief proces
2 ieder element van een groep beinvloedt de groep en omgekeerd wordt elk individu door de groep beinvloed.

Leren is een actief proces: niemand leert iets als hij het niet wil; de leerling leert beter naar mate hij meer verlangt om te leren.
Leren kost inspanning: de leerling moet dus het besluit nemen deze inspanning te willen opbrengen en aan het leerproces te willen deelnemen.
Het karakteristieke van een actieve methode is nu, dat hij het verlangen van de leerlingen om te leren stimuleert, maar de inspanning die daarvoor nodig is camoufleert. De actieve methode slaagt als de leerling er toe gebracht wordt een grotere krachtsinspanning op te brengen, zonder dat hij het merkt.
Anderzijds is elke actieve methode gebaseerd op het gebruiken van de wisselwerking die in een groep optreedt. Elk element van de groep reageert op dat wat men de groepsgeest zou kunnen noemen. De groep heeft een eigen krachtenveld, waarvan de traditionele onderwijsmethoden meestal geen gebruik maken. Dit krachtenveld openbaart zich in de creatieve mogelijkheden van de groep als geheel, die groter zijn dan de som van de bekwaamheden van de afzonderlijke leden. Als een wiskundig probleem in een groep wordt opgelost, dan is het niet altijd de sterkste die deze oplossing vindt. Hij kan op de goede weg gebracht zijn door een opmerking van een der anderen of een ontdekking van een zwakkere leerling. Wanneer zo'n zwakkere leerling ontdekt, dat zijn vondst van beslissende betekenis was voor het vinden van de oplossing, dan versterkt dat zijn zelfvertrouwen. Bij volgende gelegenheden durft hij eerder met een opmerking voor den dag komen, hij zal wegen zoeken om zijn mening te toetsen, kortom hij zal leren wiskundig te denken. Niet alleen is een groep creatiever dan elk van zijn leden, ook de zelfkritiek van de groep overtreft die van elk van zijn leden. Wanneer de groep als geheel op een verkeerde weg is en de hulp van de leraar inroept, blijkt het dat men de gemaakte denkfout minstens zo interessant vindt als de juiste oplossing. Een voorbeeld: een groep was bezig met een heel aanlokkelijke redenering over een meetkundige reeks, echter met een reden, die niet constant was maar een functie van het rangnummer n van de termen. Deze fout gaf aanleiding, na interventie van de docent, tot een studie van het begrip reeks, die buiten het leerprogramma viel.

Aangezien elke groep er naar streeft dat ieder van zijn leden het met de conclusies eens is, gaat de groep bij wijze van spreken in de plaats treden van de docent, de groep gaat formuleren en overtuigen. Dat wil natuurlijk niet zeggen dat nu de leraar overbodig wordt, zijn rol wordt echter geheel anders. Zoals bij iedere methode brengt hij zijn kennis en methode van werken in, maar nu niet meer in de relatie heersen-onderwerpen, meester-leerling. Het is niet meer nodig dat hij zijn wil doet gelden om de leerling die de nodige inspanning om wiskunde te leren niet wil opbrengen toch daartoe te dwingen. Tenslotte werkt dat namelijk

maar weinig uit.
Inplaats van de man op zijn voetstuk moet hij de medewerker van zijn leerlingen worden. Hij komt de groepen te hulp die niet verder kunnen, hij brengt ze op het spoor van een betere redenering, hij controleert of het gesprek in de groep goed verloopt. Resumerend: De actieve methode berust op het initiatief van de zijde van de leerlingen en het voortdurend beschikbaar zijn van de leraar.

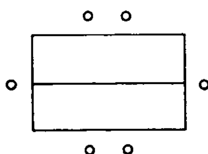
De uitdrukking 'actieve methode' heeft een mooie klank, we moeten echter oppassen dat we er niet een toverwoord inzien, dat ons in staat stelt in één klap alle didactische moeilijkheden uit de weg te ruimen. Andere onderwijsmethoden behouden ook hun plaats, zoals de geleide discussie over een onderwerp, geprogrammeerde instructie, een les over de geschiedenis van een bepaald onderdeel van de theorie, enz.

De schrijver behandelt nu twee vormen van actief onderwijs, nl. die welke hij noemt 'het bestuderen van opgaven' en 'Philips 6×6'.
Het bestuderen van opgaven staat aan het begin van de studie van een stuk theorie, inplaats van zoals gewoonlijk aan het eind daarvan. De manier van werken zoals de schrijver zich die voorstelt kan het best worden toegepast met een groep van ten hoogste 15 leerlingen.
De tafels en stoelen worden in een kring gezet om daarmee als het ware ruimtelijk te demonstreren dat allen gelijk zijn. Omdat zich bij het groepswerk dikwijls het verschijnsel voordoet, dat het in het begin wat stroef gaat is het wenselijk twee aaneensluitende lesuren te kunnen gebruiken, maar noodzakelijk is dat niet.
De leraar stelt eerst het probleem, bijvoorbeeld een vraagstuk uit het boek of een gestencilde opgave. In het laatste geval kan men ook een serie op elkaar volgende problemen aan de leerlingen voorleggen.
Het probleem moet op zo'n manier aan de leerlingen worden gepresenteerd dat de taal geen moeilijkheden geeft, elke leerling moet de vragen volledig begrijpen.
Men moet er niet voor terugschrikken veel tijd te besteden aan de presentatie van het probleem. Men kan met de leerlingen bekijken hoe de tekst gebruikt kan worden om de oplossing daaruit af te leiden, hoe de antwoorden op sommige vragen impliciet vervat zijn in volgende opdrachten, hoe soms belangrijke aanwijzingen een heel eind verderop te vinden zijn, enz.... kortweg men moet de leerlingen laten zien en bewijzen dat men zich aan grote gevaren blootstelt als men probeert een probleem op te lossen zonder te hebben nagedacht over de manier waarop men het zou kunnen oplossen.
De leerlingen beginnen nu te zoeken naar de oplossing. Nu moet de leraar zich niet terugtrekken uit de groep, integendeel hij moet deze niet aan zijn lot overlaten zodat ze zich zelf nu maar moeten redden, maar hij moet het zoeken steeds weer aanmoedigen. Hij kan vragen welke ideeën er in de groep zijn, hij kan een hint geven in de goede richting. Dat is vooral in het begin erg belangrijk. De leerlingen voelen zich nog niet vrij, durven zich niet te uiten, de

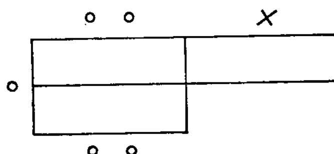
slimme opmerkingen van hun leraar vallen nog in een angstige stilte.
Men moet zich echter niet laten ontmoedigen, na enkele groepsbijeenkomsten lijkt het begin van de discussie over de oplossing van een probleem dikwijls op de aftrap in een rugbywedstrijd van woorden.
Na het zoeken naar een oplossing en ook dikwijls tijdens deze fase komt het erop aan de voorgestelde oplossingen critisch te bekijken. Het is belangrijk dat de docent dan kans ziet ieder zijn zegje te laten doen, opdat ook de zwakke leerling zelfvertrouwen kan krijgen. Het is belangrijk de groep bij het onderwerp te houden, tussenoplossingen te formuleren of te laten formuleren. Een bekende truc om iedereen aan het woord te krijgen is aan een zwijgende leerling op te dragen eens te formuleren wat men tot dan toe gevonden heeft.
Tijdens de fasen dat de resultaten worden geformuleerd en becritiseerd is het gewenst dat iedereen meedoet. De praters en de dagdromers moeten er bij gehaald worden. Maar tijdens de fase van het zoeken naar een oplossing moet ieder zoveel mogelijk vrij zijn. Dan moet iemand naar het bord kunnen lopen om daar te tekenen of te schrijven, men moet kleine groepjes kunnen vormen, waarin het probleem besproken wordt of met zijn allen om de tafel blijven zitten, net naar de stemming in de groep is.
Is het probleem opgelost dan is het noodzakelijk dat de groep probeert de oplossing te analyseren en de principes daarvan te formuleren. Hier speelt de leraar weer een zeer belangrijke rol. Hij moet er voor zorgen dat men zich hier niet van afmaakt of te snel tevreden is. Het is het formuleren van de eindconclusie die de groep het gevoel moet geven het werk beëindigd te hebben.
Bij deze methode komt het vooral aan op de zorgvuldigheid van de leraar. Hij moet er zowel voor waken het werk van de leerlingen te doen, als ze te lang te laten bezig zijn met detailkwesties. Er is geen recept te geven voor het voeren van de groep naar de oplossing, voor het stimuleren van de leerlingen, ze te bemoedigen, weer op gang te brengen, ze te helpen zich bewust te worden van de principiële kanten van de oplossing, enz. Deze dingen moeten geleerd worden door ervaringen op te doen, soms te slagen, soms te falen.
Maar . . . deze methode kan eigenlijk alleen toegepast worden in een klas van acht tot vijftien leerlingen. De meeste klassen bevatten er meer (en in Frankrijk zelfs meer dan de 25, die door de lerarenorganisatie als maximum gesteld zijn).

De schrijver bespreekt daarom tenslotte de methode Philips 6 x 6 waarmee klassen van 24 of meer leerlingen aan het groepswerk gezet kunnen worden.
Men verdeelt de klas daartoe in groepen van ongeveer zes. Elk van de groepen werkt gedurende zes à tien minuten aan het probleem. Iedere groep heeft een rapporteur, die het standpunt van de groep verdedigt tijdens een discussie in een forum bestaande uit de rapporteurs en de docent. Deze discussie duurt eveneens ongeveer zes a tien minuten. Daarna voegen de rapporteurs zich weer bij hun groepen, hetzij om het onderzoek voort te zetten, hetzij om met de volgende etappe van het probleem te starten. In wezen blijft de manier van werken gelijk aan de hierboven beschreven methode. Enkele punten van verschil

moeten genoemd worden.
Elk der groepen kan een bezetting hebben van vier tot acht personen, de aanbevolen bezetting is zes personen. Men kan de groepen het best laten vormen door leerlingen die graag bij elkaar zijn, zonodig kan men al te grote verschillen corrigeren. Men moet niet alle besten aan één tafel zetten, ook niet alle zwakken. Omgekeerd moet men ook niet de besten verspreiden over alle groepen.
Het is gewenst de tafels en stoelen zo te laten plaatsen dat de opstelling van de groep zo compact mogelijk is, bijvoorbeeld zoals in figuur 1.

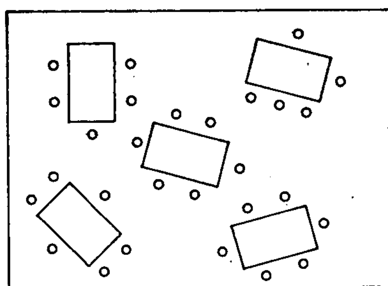

FIGUUR 1

Stelt een groep zich op zoals in figuur 2, dan is in 9 van de 10 gevallen de leerling *x* een nogal sterke persoonlijkheid, die niet toevallig op deze plaats terecht is gekomen. Door de keuze van deze plaats geeft hij te kennen, dat hij een



FIGUUR 2

'outsider' wil blijven. Men moet zo'n houding niet veroordelen, maar de effectieve werkzaamheid van de groep wordt er wel door verminderd.
De leraar moet in een der hoeken van de klas een tafel klaar zetten voor het forum van rapporteurs. De klas krijgt daardoor bijvoorbeeld de volgende indeling.


FIGUUR 3

De gesprekstijd voor de groepen moet liggen tussen de zes en tien minuten, waarbij zes minuten wel als de ondergrens beschouwd moet worden. De leraar roept de rapporteurs bij elkaar en waarschuwt ze daarvoor ongeveer twee minuten van te voren. Hij moet er voor zorgen dat alles zo vlot mogelijk verloopt, want iedere vertraging bij een der groepen roept protesten op bij de andere.

Gedurende de zitting van het forum van rapporteurs hebben de leden van de andere groepen wel de neiging door interrupties tussen beide te komen. Men kan, wanneer dat nodig mocht zijn deze interrupties verminderen door alleen een schriftelijk contact tussen de rapporteur en zijn groep toe te staan.
Gedurende de forumzitting noteert de docent de punten, waarover men het eens is, de moeilijkheden die gesignaleerd worden, de redeneringen die zijn toegepast, enz. precies zoals bij de eerder beschreven methode voor het oplossen van problemen.
De volgorde van werken is dus ongeveer zo:
Om te beginnen wordt aan alle groepen tegelijk het probleem voorgelegd, dan wordt er in de groepen gedurende zes tot tien minuten naar de oplossing gezocht, de rapporteurs brengen dan verslag uit; wanneer ze teruggekeerd zijn naar de groep wordt er of verder gediscussieerd of een nieuw probleem aangepakt, enz.
Gedurende de discussies in de groepen kan de docent de resultaten zoals die in de forumbijeenkomst zijn gevonden op het bord schrijven. Dat zal vooral een steun zijn voor die groepen, die een rapporteur hebben, die niet al te sterk is in het formuleren van de resultaten.
De rapporteur speelt dus een dubbele rol: enerzijds moet hij aan het forum overbrengen tot welke resultaten zijn groep is gekomen, anderzijds zal hij in zijn groep weer alle aanwijzingen die deze verder kunnen helpen moeten inbrengen. De rapporteur heeft dus gedurende de les de taak te analyseren, samen te vatten, door te geven, uit te leggen. Hij is verreweg de meest actieve tijdens het proces. Daarom is het gewenst dat ieder lid van de groep een keer deze post moet bezetten. De eerste keer kan men de groep wel zijn rapporteur laten kiezen. Wanneer de docent ontdekt dat de groepen op een verkeerde weg zijn, of de indruk krijgt dat de rapporteurs de moeilijkheid niet met hun opdrachtgevers kunnen bespreken, dan kan hij het beste bij het bord voor allen tegelijk de moeilijkheid bekijken. Men moet vooral soepel te werk gaan en zonodig de groepszittingen onderbreken voor een bespreking.
Ook bij deze manier van werken is het absoluut noodzakelijk aan het eind een samenvatting te geven van de resultaten. Alleen bij het bespreken van deze samenvatting wordt iedere leerling zich bewust van het werk dat in elk van de groepen verzet is.
Nog enkele opmerkingen tot slot:
Bij de actieve methoden is het zeker niet de bedoeling de leerlingen maar te laten doen wat ze willen, men moet ze beslist leiden. Alleen moet deze leiding niet uitdrukkelijk blijken.
De directe methoden worden door leerlingen en docenten meestal wel op prijs gesteld. Men moet er echter rekening mee houden dat ze tijdrovend zijn. Het leren omgaan met de methode Philips 6 x 6 kost zeker drie lessen. Wel is het zo dat ze op den duur hun vruchten gaan afwerpen en dat het rendement toeneemt naarmate men de methode beter leert toepassen.

Gelijkvormige matrices

Dr. G. BOSTEELS

Berchem

1 Inleiding

In deze korte bijdrage willen we enkele bekende dingen over gelijkvormige matrices bundelen, enkele voorbeelden verwerken en laten zien waartoe dergelijk materiaal dienstbaar is.

DEFINITIE. Een matrix heet inverteerbaar als en slechts als haar determinant van nul verschilt, m.a.w. als en slechts als de matrix regulier is.
Voorbeelden: 1° als $ad-bc \neq 0$, dan is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

inverteerbaar en de inverse matrix is

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Dit laat ons toe een eenvoudig regeltje te formuleren voor het inverteren van een 2×2 matrix: neem een scalaire vermenigvuldiger gelijk aan $1/\det A$, verwissel in de oorspronkelijke matrix de elementen op de hoofddiagonaal en keer het teken om van de elementen op de nevendiagonaal.
Is nu A een 3×3 matrix en is $\det A \neq 0$, dan is de inverse matrix van

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ de matrix } A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

waarbij wel goed gelet moet worden op de volgorde van de indices in A^{-1}. Vanzelfsprekend betekent A_{ij} hierin de minor van het element a_{ij} in A. Merk nu ook op dat het regeltje voor de 2×2 matrices niets anders is dan een transcriptie van het regeltje voor het inverteren van een 3×3 matrix, en deze laatste regel is algemeen geldig, zoals licht te bewijzen valt.

2 Een equivalentierelatie

DEFINITIE. – Twee inverteerbare matrices heten gelijkvormig als en slechts als er een inverteerbare matrix X bestaat, zodanig dat $A = X^{-1} \cdot B \cdot X$
Neem een verzameling inverteerbare $n \times n$ matrices en onderzoek de relatie 'matrix A is gelijkvormig met matrix B' in deze verzameling.

1° *deze relatie is reflexief.*

Inderdaad: voor elke matrix geldt

$$A = I^{-1} \cdot A \cdot I$$

waarbij I de $n \times n$ eenheidsmatrix is (alle elementen $a_{ii} = 1$ en alle elementen $a_{ij} = 0$ met $i \neq j$).

2° *deze relatie is symmetrisch.*

Inderdaad: zijn A en B gelijkvormige matrices, dan geldt

$$\begin{aligned} A = X^{-1} \cdot B \cdot X &\Leftrightarrow X \cdot A = X \cdot X^{-1} \cdot B \cdot X \\ &\Leftrightarrow X \cdot A = B \cdot X \\ &\Leftrightarrow X \cdot A \cdot X^{-1} = B \cdot X \cdot X^{-1} \qquad (4) \\ &\Leftrightarrow X \cdot A \cdot X^{-1} = B \cdot I \\ &\Leftrightarrow X \cdot A \cdot X^{-1} = B. \end{aligned}$$

3° *deze relatie is transitief.*

Inderdaad: uit $A = X^{-1} \cdot B \cdot X$ (1) en $B = Y^{-1} \cdot C \cdot Y$ (2) volgt, door substitutie van (2) in (1):

$$A = X^{-1} \cdot Y^{-1} \cdot C \cdot Y \cdot X \qquad (3)$$

Maar $X^{-1} \cdot Y^{-1} = (Y \cdot X)^{-1}$; stelt men dus $Y \cdot X = Z$, dan wordt (3):

$$A = Z^{-1} \cdot C \cdot Z$$

en de matrices A en C zijn dus gelijkvormig.
Besluit: de relatie 'is gelijkvormig met' in een verzameling inverteerbare matrices is een equivalentierelatie.
Men kan zich dus de vraag stellen: is een matrix gegeven, hoe kan men dan de equivalentieklasse van deze matrix bepalen?

3 Vraagstuk

Zijn de matrices $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ gelijkvormig?

Het komt er dus op aan een matrix $\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$ te vinden zodanig dat, zoals blijkt uit (4):

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

of

$$\begin{pmatrix} 6x+2u-8x+3y & 6y+2v-6x+y \\ -2x+\ u-8u+3v & -2y+\ v-6u+v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

of

$$\begin{aligned} 2x-3y-2u \quad &= 0 \\ 2x \quad +7u-3v &= 0 \\ 6x-7y \quad -2v &= 0 \\ 2y+6u-2v &= 0 \end{aligned}$$

Om dit stelsel op te lossen kun je eerst even de determinant van het stelsel bekijken; deze determinant is nul. Ga je nu de minoren onderzoeken, dan blijken die ook allemaal nul te zijn, zodat je op de tweede minoren dient over te gaan. Hier vind je echter onmiddellijk van nul verschillende determinanten. Je komt zo gemakkelijk tot de algemene oplossing van het stelsel (q en p willekeurige parameters):

$$\begin{aligned} x &= 3q-7p \\ y &= 2q-6p \\ u &= 2p \\ v &= 2q \end{aligned}$$

met

$$\begin{vmatrix} 3q-7p & 2q-6p \\ 2p & 2q \end{vmatrix} \neq 0$$

of $q^2-3pq+2p^2 \neq 0$ of $2p \neq q$ en $p \neq q$.
Kies je nu $p = 0$, $q = 1$, dan heb je

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 2 \\ u &= 0 \\ v &= 2 \end{aligned}$$

met de controle op $A \cdot X = X \cdot B$ of op $X^{-1} \cdot A \cdot X = B$

Controle: op de eerste manier:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 16 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 16 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

ofwel, op de tweede manier

$$\tfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 48 & 36 \\ -18 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Geef je nu aan p en q andere stellen waarden, dan kan je zoveel oplossingen vinden als je wilt.

4 Sporen en eigenwaarden

Het spoor van een matrix is de som van de elementen op de hoofddiagonaal, dus $\sum a_{ii}$ met $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
De eigenwaarden van een matrix zijn de wortels van de vergelijking

$$\det(\mathrm{A} - k \cdot \mathrm{I}) = 0$$

die karakteristieke vergelijking heet (of: vergelijking op de eigenwaarden) van de matrix A.
Nu spelen de sporen een belangrijke rol in de theorie van de karakteristieke vergelijkingen. Zonder aan de algemeenheid te tornen willen we nu even het geval van de 3×3 matrices onderzoeken en de formule voor een veralgemening opgeven.

Vraagstuk: bepaal de karakteristieke vergelijking van de $\mathrm{A}_{3\times 3}$ matrix.
Deze vergelijking is:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33}-k \end{vmatrix} = 0$$

of, uitgewerkt en gerangschikt naar k

$$k^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})k^2$$
$$+(a_{11}a_{33}+a_{33}a_{22}+a_{22}a_{11}-a_{23}a_{32}-a_{13}a_{31}-a_{12}a_{21})k$$
$$+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}-a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{22}a_{33} = 0$$

of

$$k^3-\text{sp A}\cdot k^2+\text{X}\cdot k-\det \text{A} = 0$$

De coëfficiënt van k^2 is dus wel eenvoudig te vertolken; het is het tegengestelde van het spoor van matrix A. We proberen nu aan de coëfficiënt van k een vorm te geven, vatbaar voor een praktische vertolking.
We zoeken daartoe het spoor van A · A of A^2. Dit spoor is

$$\text{sp A}^2 = a_{11}^2+a_{22}^2+a_{23}^2+2a_{12}a_{21}+2a_{13}a_{31}+2a_{23}a_{32}$$

en als je de karakteristieke vergelijking in de gedaante

$$c_0k^3+c_1k^2+c_2k+c_3 = 0$$

schrijft, dan is

$$c_0 = 1$$
$$c_1 = -\text{sp A}$$
$$c_2 = -\tfrac{1}{2}(c_1\cdot \text{sp A}+\text{sp A}^2)$$
$$c_3 = \det \text{A}.$$

Algemeen: zijn $sp_1, sp_2, sp_3, \ldots, sp_n$ de sporen van de matrices A, A^2, $A^3, \ldots, A_n$, dan gelden de volgende coëfficiëntregels voor de karakteristieke vergelijking:

$$c_0 = 1$$
$$c_1 = -sp_1$$
$$c_2 = -\tfrac{1}{2}(c_1\cdot sp_1+sp_2)$$
$$c_3 = -\tfrac{1}{3}(c_2\cdot sp_1+c_1\cdot sp_2+sp_3)$$
$$\ldots$$
$$c_n = -\frac{1}{n}(c_{n-1}\cdot sp_1+c_{n-2}\,sp_2+\cdots+c_2\,sp_{n-1}+sp_n)$$

Dit verklaart meteen waarom in vele handboeken zoveel belang gehecht wordt aan het berekenen van de opeenvolgende machten van een gegeven matrix.
Een voorbeeld ter illustratie:

$$\text{Neem de matrix A} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

met $sp_1 = 1+2+3 = 6$

Verder heb je

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 6 & 12 & 10 \\ 4 & 10 & 13 \end{pmatrix} \text{ en } A^3 = \begin{pmatrix} 17 & 30 & 24 \\ 30 & 56 & 54 \\ 24 & 54 & 59 \end{pmatrix}$$

met $sp_2 = 5+12+13 = 30$ en $sp_3 = 17+56+59 = 132$
Daaruit volgen de coëfficiënten van de karakteristieke vergelijking

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 \\ c_1 &= -6 \\ c_2 &= -\tfrac{1}{2}((-6)\cdot 6+30) = 3 \\ c_3 &= -\tfrac{1}{3}(3\cdot 6+(-6)\cdot 30+132) = 10 \end{aligned}$$

zodat deze vergelijking is

$$k^3-6k^2+3k+10 = 0.$$

Men kan nu ook gemakkelijk aantonen dat het spoor van een $n\times n$ matrix A gelijk is aan de som van de n eigenwaarden van A of

$$\text{sp } A = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

5 Herneem even de gelijkvormige matrices uit nr. 3:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

en merk op dat ze hetzelfde spoor $(6+1 = 8-1 = 7)$ hebben en ook dezelfde determinant $(6+4 = -8+18 = 10)$.
Is dit een toevallige eigenschap of geldt ze algemeen?

Stelling. – Gelijkvormige matrices hebben dezelfde karakteristieke functie, dezelfde karakteristieke vergelijking, dezelfde eigenwaarden en ook hetzelfde spoor.
Inderdaad: zijn A en B gelijkvormige matrices, dan geldt

$$X^{-1}\cdot A\cdot X = B.$$

Daaruit volgt

$$\det (X^{-1}\cdot A\cdot X) = \det B$$

en dus is $\det X^{-1}\cdot \det A\cdot \det X = \det B$.

Nu is het produkt van determinanten een produkt van reële getallen (alle elementen zijn reële getallen), zodat toepassen van de commutativiteit leidt tot

$$\det X^{-1} \cdot \det X \cdot \det A = \det B$$

Maar $\det X^{-1} \cdot \det X = 1$, zodat wel degelijk

$$\det A = \det B$$

Verder hebben $X^{-1} \cdot A \cdot X$ en B dezelfde karakteristieke functie, want

$$\begin{aligned}\det(A-k \cdot I) &= \det(X^{-1} \cdot (A-k \cdot I)X) \\ &= \det(X^{-1} \cdot A \cdot X-k \cdot X^{-1} \cdot I \cdot X) \\ &= \det(X^{-1} \cdot A \cdot X-k \cdot I) \\ &= \det(B-k \cdot I)\end{aligned}$$

zodat $X^{-1} \cdot A \cdot X$ en B dezelfde karakteristieke functie hebben, enz.

6 Diagonaliseren

Neem de matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

De eigenwaarden zijn de oplossingen van de karakteristieke vergelijking.

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 & & \\ c_1 &= -9 & \quad sp_1 &= 9 \\ c_2 &= 15 & \quad sp_2 &= 9+17+25 = 51 \\ c_3 &= -7 & \quad sp_3 &= \det M = 7 \end{aligned}$$

De karakteristieke vergelijking is dan

$$k^3-9k^2+15k-7 = 0$$

Zichtbaar is 1 een wortel; verder afsplitsen geeft tenslotte de drie wortels 1, 1 en 7.
We hebben dit voorbeeld gekozen omdat het een particulariteit bevat waarop we zo dadelijk terugkomen.
Voor $k = 7$ wordt de vergelijking $A \cdot X = k \cdot X$

$$\begin{cases} -5x_1+x_2+x_3 = 0 \\ 2x_1-4x_2+2x_3 = 0 \\ 3x_1+3x_2-3x_3 = 0 \end{cases}$$

en daarvan is de kolomvector $X = (1 \quad 2 \quad 3)^t$ een oplossing.
Voor $k = 1$ geeft $A \cdot X = k \cdot X$ alleen de vergelijking

$$x_1+x_2+x_3 = 0$$

en hiervan zijn onder meer de volgende twee kolommatrices oplossingen:

$$X = (1 \quad 0 \quad -1)^t \text{ en } X = (0 \quad 1 \quad -1)^t$$

Bovendien zijn deze beide vectoren lineair onafhankelijk, want de ene is geen scalair veelvoud van de andere. Bovendien is elke eigenvector, die met deze eigenwaarde 1 overeenstemt, een lineaire combinatie van deze twee vectoren. Inderdaad elk van deze eigenvectoren is van de gedaante $(a \quad b \quad -(a+b))^t$ en

$$(a \quad b \quad -(a+b))^t = a(1 \quad 0 \quad -1)^t+b(0 \quad 1 \quad -1)^t$$

Je controleert gemakkelijk dat de drie gevonden eigenvectoren lineair onafhankelijk zijn, want de determinant

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \neq 0$$

Hoewel dus de drie eigenwaarden van de gegeven matrix niet verschillend zijn bezit de matrix toch drie onafhankelijke eigenvectoren; meestal is dit echter niet het geval als de karakteristieke vergelijking meervoudige wortels heeft. Hoe kunnen nu matrices waarvan al de eigenwaarden verschillend zijn, getransformeerd worden?

Stelling. – Is A een niet singuliere vierkante matrix met van elkaar verschillende eigenwaarden, dan bestaat er een niet singuliere matrix, van dezelfde orde, zodanig dat het produkt $X^{-1} \cdot A \cdot X$ een diagonaalmatrix is. Inderdaad: onderstel dat A een 3×3 matrix is met verschillende eigenwaarden k_1, k_2, k_3 waarmee de eigenvectoren $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$ corresponderen. Deze eigenvectoren zijn lineair onafhankelijk, zodat de matrix X, waarvan de kolommen de kolomvectoren $X^{(1)}, X^{(2)}$ en $X^{(3)}$ zijn, niet singulier is, en X^{-1} bestaat.
Verder is (eigenschap van de eigenvectoren):

$$A \cdot X^{(1)} = k_1 X^{(1)}, \quad A \cdot X^{(2)} = k_2 X^{(2)}, \quad A \cdot X^{(3)} = k_3 X^{(3)}$$

Nu weten we dat deze drie vergelijkingen kunnen vervangen worden door de éne matrixvergelijking $A \cdot X = X \cdot D$
waarin D de 3×3 diagonaalmatrix

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_3$$

voorstelt. Daaruit volgt onmiddellijk

$$X^{-1} \cdot A \cdot X = X^{-1} \cdot X \cdot D = D$$

Merk hierbij echter op dat de volgorde van de eigenwaarden in D dezelfde is als die van de overeenkomstige eigenvectoren in X.

7 Voorbeeld:

herleid de volgende matrix tot de diagonaalvorm:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

De karakteristieke vergelijking is:

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = -3 \text{ want } sp_1 = 3 \\ c_2 = -\tfrac{1}{2}((-3) \cdot (3) + 11) = -1 \text{ want } sp_2 = 5+7-1 = 11 \\ c_3 = -\det A = -3 \end{cases}$$

zodat

$$k^3 - 3k^2 - k + 3 = 0$$

waarvan de wortels 1, -1 en 3 zijn.
De overeenkomstige eigenvectoren zijn gemakkelijk te vinden:

$$(1 \quad -1 \quad 0)^t, \quad (0 \quad 1 \quad -1)^t \quad \text{en} \quad (2 \quad 3 \quad -1)^t$$

Hier is dan

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X^{-1} = \tfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

want $\det X = 4$.

Verder heb je dan

$$X^{-1} \cdot A \cdot X = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

wat wel degelijk een diagonaalmatrix is.
Je kunt nu precies hetzelfde doen met de matrix uit nr. 6 en het lukt hoewel dus hier een dubbele wortel 1 voorhanden is.

8 Symmetrische matrix.

DEFINITIE: een symmetrische matrix heeft elementen die voldoen aan $a_{ij} = a_{ji}$ voor alle waarden van de indices.
Neem nu de symmetrische matrix

$$\begin{pmatrix} a & b'' \\ b'' & a' \end{pmatrix}$$

Haar eigenwaarden zijn oplossingen van

$$(a-k)(a'-k)-b''^2 = 0$$

of

$$k^2-(a+a')k+aa'-b''^2 = 0$$

met discriminant

$$(a+a')^2-4(aa'-b''^2) = (a-a')^2+4b''^2$$

die nooit negatief is. Er zijn dus altijd twee verschillende eigenwaarden, zolang a, a' en b'' niet gelijktijdig nul zijn. Hieruit volgt dan dat elke symmetrische 2×2 matrix steeds orthogonaal in de klassieke canonieke vorm kan gebracht worden.

Voorbeeld: $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ met karakteristieke vergelijking $k^2-6k+8 = 0$ en eigenwaarden $k_1 = 2$, $k_2 = 4$.
Met de eigenwaarde k_1 komt de enige vergelijking $x_1+x_2 = 0$ overeen en met k_2 de vergelijking $x_1+x_2 = 0$, zodat we als overeenkomstige eigenvectoren kunnen kiezen

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^t \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^t$$

We kunnen dus hier kiezen

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ met haar inverse } \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Controleer nu dat

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

en dit probleem stelt zich 'dagelijks' in de analytische meetkunde.

De herexamens 1970

Voor het eerst waren er schriftelijke herexamens.
Wij laten hieronder die voor mavo (B-programma) volgen; zowel voor mavo-3 als voor mavo-4 waren de onderdelen wiskunde-I in de vorm van meerkeuzevragen. De kandidaten wisten dat slechts één van de antwoorden **a**, **b**, **c** of **d** goed was.
De havo-opgaven komen tot onze spijt pas in het volgende nummer.

Wiskunde I MAVO-3 programma B ($2\frac{1}{2}$ uur)

1 Bij een translatie gaat het punt (0, 0) over in het punt $(-3, 4)$.
Een punt (x, y) gaat bij deze translatie over in het punt

a $(x+3, y+4)$, **b** $(x+3, y-4)$, **c** $(x-3, y+4)$, **d** $(x-3, y-4)$.

2 Bij spiegeling in de X-as gaat het punt (p, q) over in het punt (r, s).
Dan geldt

a $p+r = 0$ en $q+s = 0$, **b** $p-r = 0$ en $q+s = 0$, **c** $p+r = 0$ en $q-s = 0$, **d** $p-r = 0$ en $q-s = 0$.

3 Als $a = 3+\sqrt{2}$ en $b = 3-\sqrt{2}$, dan is ab gelijk aan

a $7-6\sqrt{2}$, **b** $11-6\sqrt{2}$, **c** 5, **d** 7.

4 Een kubus heeft een ribbe met lengte 3.
De lengte van een lichaamsdiagonaal is dan

a 6, **b** 9, **c** $\sqrt{18}$, **d** $\sqrt{27}$.

5 $p * q$ betekent: vermenigvuldig p en q en trek de wortel uit de uitkomst.
Dan is $24 * (4 * 9)$ gelijk aan

a 12, **b** $6\sqrt{6}$, **c** $12\sqrt{2}$, **d** $12\sqrt{6}$.

6 Van een rechthoekige driehoek zijn de lengten van de zijden 8, 15 en 17.
De cosinus van de kleinste hoek is dan gelijk aan.

a 8/17, **b** 15/17, **c** 17/15, **d** 17/8.

7 De sinus van een scherpe hoek is gelijk aan 3/5.
De tangens van die hoek is gelijk aan

a 3/4, **b** 4/5, **c** 4/3, **d** 5/3.

8 Een functie f is gedefinieerd door $f(x) = 2x-3$.
$f(p) = 0$. Dan is p gelijk aan

a -3, **b** 0, **c** 2/3, **d** $1\frac{1}{2}$.

9 De grafiek van de functie $x \rightarrow -x^2-x$ bevat het punt

a $(-2, -6)$, **b** $(-2, -2)$, **c** $(-2, 2)$, **d** $(-2, 6)$.

10 De punten (0, 0), (1, 2) en (3, 0) zijn hoekpunten van een vlieger.
Het vierde hoekpunt kan zijn

a $(-2, 2)$, **b** $(1, -2)$, **c** $(2, -2)$, **d** $(4, 2)$.

11 x^2+5x-6 is te ontbinden in twee faktoren.
Een van deze faktoren kan zijn

a $x-6$, **b** $x-3$, **c** $x-2$, **d** $x-1$.

12 Het aantal symmetrie-assen van de figuur gevormd door twee elkaar loodrecht snijdende lijnen bedraagt

a 0, **b** 1, **c** 2, **d** 4.

13 Als $x = \sqrt{0{,}4}$, dan geldt

a $0{,}1 < x < 0{,}3$, **b** $0{,}3 < x < 0{,}5$, **c** $0{,}5 < x < 0{,}7$, **d** $0{,}7 < x < 0{,}9$.

14 De tangens van de hoek, die de lijn met vergelijking $5x-8y-3 = 0$ maakt met de positieve richting van de X-as, is gelijk aan

a $-8/5$, **b** $-5/8$, **c** $5/8$, **d** $8/5$.

15 De oppervlakte van een cirkel met middellijn 6 is gelijk aan

a 6π, **b** 9π, **c** 12π, **d** 36π.

16 Het punt (1, 2) is *geen* punt van de grafiek van de functie

a $x \to -x^2+3x$, **b** $x \to -x^2+3$, **c** $x \to x^2+2x$, **d** $x \to x^2+1$.

17 Een man van 1,75 m lengte staat 3 m van een lantaarn waarvan de lamp zich 3,50 m boven de grond bevindt.
De lengte van de schaduw van de man die door de lantaarn wordt geworpen op de grond is

a 1,50 m, **b** 1,75 m, **c** 3 m, **d** 3,50 m.

18 Elk parallellogram is

a lijnsymmetrisch en puntsymmetrisch, **b** lijnsymmetrisch maar niet puntsymmetrisch, **c** puntsymmetrisch maar niet lijnsymmetrisch, **d** niet lijnsymmetrisch en niet puntsymmetrisch.

19 De functie f gedefinieerd door $f(x) = x^2+2x-4$ heeft als minimum

a -5, **b** -4, **c** -2, **d** -1.

20 De oplossingsverzameling van de vergelijking $x^2-4x+3 = 0$ bevat

a twee positieve getallen, **b** een positief en een negatief getal, **c** twee negatieve getallen, **d** geen enkel getal.

21 De oplossingsverzameling van de ongelijkheid $\frac{1}{2}(6-3x) < 4$ is

a $\{x|x < -2/3\}$, **b** $\{x|x > -2/3\}$, **c** $\{x|x < 2/3\}$, **d** geen van deze.

22 $x^2-7x+12 = (x+4)(x+3)$ is waar voor

a geen enkele waarde van x, **b** slechts één waarde van x, **c** precies twee waarden van x, **d** alle waarden van x.

23 Het punt $(-1, 1)$ wordt gespiegeld in de lijn met vergelijking $x+y = 0$.
Het beeldpunt is

a $(-1, -1)$, **b** $(-1, 1)$, **c** $(1, -1)$, **d** $(1, 1)$.

24 De grafiek van de functie f, gedefinieerd door $f(x) = (x-3)^2+2$

a snijdt niet de X-as en niet de Y-as, **b** snijdt alleen de X-as, **c** snijdt alleen de Y-as, **d** snijdt de X-as en de Y-as.

25 De zijden van $\triangle ABC$ zijn 4, 7 en 10.
$\triangle PQR$ is gelijkvormig met $\triangle ABC$ en heeft de omtrek 84.

I De kortste zijde van $\triangle PQR$ is 16

II De oppervlakte van $\triangle PQR$ is 16 maal de oppervlakte van $\triangle ABC$.

a I en II zijn beide waar, **b** alleen I is waar, **c** alleen II is waar, **d** I en II zijn beide niet waar.

Wiskunde II MAVO-3 programma B ($1\frac{1}{2}$ uur)

1 Teken in een rechthoekig assenstelsel XOY een driehoek met de hoekpunten $A(1, -3)$, $B(7, 2)$ en $C(1, 2)$.

a Bereken de lengte van AB; benader het antwoord in 1 dec. nauwkeurig.

b Punt B gaat door lijnspiegeling in lijn AC over in punt D.
Wat zijn de coördinaten van punt D?

c Punt E is het vierde hoekpunt van ruit $BADE$.
Bereken de coördinaten van punt E.

d AB snijdt de X-as in P.
AD snijdt de X-as in Q.
Toon aan dat $\triangle PQE$ gelijkbenig is.

2 Gegeven de puntverzamelingen
$U = \{(x, y)|y = 2x+2\}$ en $V = \{(x, y)|y = -2x+6\}$.

a Bereken $U \cap V$.

b Teken de grafieken van U en V.

c Deze grafieken sluiten met de X-as een driehoek in.
Bereken de oppervlakte van deze driehoek.

d Onderzoek of het mogelijk is een waarde van p te bepalen waarvoor de hoekpunten van deze driehoek alle liggen op de grafiek van
$W = \{(x, y)|y = -x^2+2x+p\}$.

3 Gegeven de functies
$f: x \rightarrow 9-x^2$ en $g: x \rightarrow x+3$.
a Los op $f(x) = 8$, **b** Los op $f(x) = g(x)$, **c** Teken in één figuur de grafieken van f en g.

4 Gegeven een lijn l en een punt P niet op l gelegen.
Langs l beweegt een punt dat zich achtereenvolgens in A, B en C bevindt.
AP, BP en CP maken met l hoeken van resp. 40°, 80° en 90°.
$AB = 10$.
a Bereken BP, **b** Bereken CP, **c** Bereken AP.

Wiskunde I MAVO-4 Serie B (2 uur)

De items 1 t/m 10 zijn geheel gelijk aan het eerste tiental van mavo-3 – Wiskunde I.

11 De functie f is gedefinieerd door $f(x) = (x-3)(x+2)$.
De oplossingsverzameling van de ongelijkheid $f(x) > 0$ is
a $\{x|x > -2\}$, **b** $\{x|x < 3\}$, **c** $\{x|-2 < x < 3\}$, **d** $\{x|x < -2 \text{ of } x > 3\}$.

12 De sinus van een stompe hoek is 4/5.
De cosinus van deze hoek is
a 3/5, **b** −3/5, **c** 3/5 of −3/5, **d** geen van deze.

13 Welk getallenpaar behoort tot
$\{(x, y)|3y-4x < 0\} \cap \{(x, y)|x^2+y^2 = 25\}$?
a $(-3, -4)$, **b** $(-3, 4)$, **c** $(3, -4)$, **d** $(3, 4)$.

14 De functie f is gedefinieerd door $f(x) = -x^2-2x+1$.
De grootste waarde uit het bereik van f is
a 0, **b** 1, **c** 2, **d** 3.

15 De grootte van een hoek in graden wordt aangegeven met α, waarbij $90 \leqq \alpha \leqq 180$.
De bewering $\sin\alpha = \cos\alpha$ is waar

a alleen voor $\alpha = 90$, **b** alleen voor $\alpha = 135$, **c** alleen voor $\alpha = 180$, **d** voor geen enkele waarde van α.

16 $x^2 - 10x + 24 = (x-12)(x+2)$ is waar voor

a geen enkele waarde van x, **b** slechts één waarde van x, **c** precies twee waarden van x, **d** alle waarden van x.

17 Het domein van een relatie is $\{-1, 0, 1\}$.
De grafiek van de relatie bestaat uit de punten $(-1, 0)$, $(0, -1)$ en $(1, 0)$.
Deze relatie kan zijn

a $\{(x, y)|y = -x-1\}$, **b** $\{(x, y)|y = x-1\}$,
c $\{(x, y)|y = x^2-1\}$, **d** $\{(x, y)|y = -x^2-1\}$.

18 De grafiek van de functie $x \rightarrow (x-2)^2-2$ ontstaat uit de grafiek van de functie $x \rightarrow x^2$ door de translatie

a $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, **b** $\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$, **c** $\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$, **d** $\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$.

19 De grafiek van de functie $x \rightarrow x^2+3x-4$ wordt gespiegeld in de Y-as.
Het spiegelbeeld is de grafiek van de functie

a $x \rightarrow x^2-3x+4$, **b** $x \rightarrow -x^2+3x-4$, **c** $x \rightarrow -x^2-3x+4$, **d** $x \rightarrow x^2-3x-4$.

20 In een bedrijfje met tien werknemers worden maandsalarissen van f 1000 en f 2000 uitgekeerd.
Het gemiddelde maandsalaris is f 1200.
Hoeveel werknemers hebben een maandsalaris van f 1000?

a 2, **b** 4, **c** 6, **d** 8.

21 $(-1, 2)$ en $(1, -2)$ zijn elkaars beeldpunten bij spiegelen in een lijn.
De vergelijking van deze lijn is

a $y = -2x$, **b** $y = -\frac{1}{2}x$, **c** $y = \frac{1}{2}x$, **d** $y = 2x$.

22 Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 70°$ en $\angle B = 32°$. De lengte van de zijde AC is 5,3.
De lengte van BC, in één decimaal nauwkeurig, is

a 9,4, **b** 9,8, **c** 10,2, **d** 10,6.

23 Van een scherpe hoek α is $\cos\alpha < \frac{1}{2}$.

a $\sin\alpha > \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\tan\alpha > \sqrt{3}$, **b** $\sin\alpha < \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\tan\alpha > \sqrt{3}$,

c $\sin\alpha > \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\tan\alpha < \sqrt{3}$, **d** $\sin\alpha < \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\tan\alpha < \sqrt{3}$.

24 Bij een lijnspiegeling zijn $(-1, -2)$ in $(1, 4)$ elkaars beeldpunten.
Welk van de volgende punten is een dekpunt bij dezelfde spiegeling?

a $(-3, 2)$, **b** $(-1, 1)$, **c** $(2, 0)$, **d** $(3, -2)$.

25 Van de functie $x \rightarrow x^2-2x$ is het domein $\{x|-1 \leqq x \leqq 2\}$.
In het bereik van de functie is

a de kleinste waarde -3 en de grootste waarde 0, **b** de kleinste waarde -1 en de grootste waarde 3, **c** de kleinste waarde -1 en de grootste waarde 0, **d** de kleinste waarde 0 en de grootste waarde 3.

26 Een rotatie met de oorsprong als centrum wordt uitgevoerd over een scherpe positieve draaihoek α, waarvoor $\tan\alpha = \frac{3}{4}$.
Het beeldpunt van (0, 5) is
a $(-4, 3)$, b $(-3, 4)$, c $(3, 4)$, d $(4, 3)$.

27 De ribben van een houten balk zijn 2 cm, 3 cm en 4 cm lang.
Evenwijdig met een zijvlak wordt de balk in twee stukken gezaagd. Een van deze stukken is 1 cm dik.
Geen van de stukken van de balk kan een inhoud hebben van
a $12\ cm^3$, b $14\ cm^3$, c $16\ cm^3$, d $18\ cm^3$.

28 Beschouw de verzameling vergelijkingen $ax+b = 3$, waarbij
$a \in \{2, 3, 4\}$ en $b \in \{0, 1\}$.
Hoeveel verschillende gehele waarden van x voldoen aan deze vergelijkingen?
a 1, b 2, c 5, d 6.

29 $\{(x, y)|y = x^2-3\} \cap \{(x, y)|y = 2x-4\}$ is gelijk aan
a $\{(-1, -2)\}$, b $\{(0, -4)\}$, c $\{(1, -2)\}$, d $\{(2, 1)\}$.

30 Gegeven zijn de punten $O(0, 0)$, $P(-1, -2)$ en $Q(2, -2)$.
Door een rotatie om O wordt $\triangle\ OPQ$ afgebeeld op $\triangle\ OP'Q'$.
P' en Q' kunnen zijn
a $P'(-2, -1)$ en $Q'(-2, 2)$, b $P'(-1, 2)$ en $Q'(2, 2)$, c $P'(1, 2)$ en $Q'(-2, 2)$,
d $P'(2, 1)$ en $Q'(2, -2)$.

Wiskunde II MAVO-4 Serie B (2 uur)

1 Een gebied G wordt in kaart gebracht in een rechthoekig assenstelsel XOY.
De afbeelding noemt men G'.
Voor 1 km wordt in de tekening 1 cm genomen.
Neem op de assen 1 cm als eenheid.
$G' = \{(x, y)|x > 0, y > 0 \text{ en } x+y < 6\}$.
a Teken de lijn met vergelijking $x+y = 6$.
Het gebied G wordt in twee delen A en B verdeeld met als afbeeldingen A' en B'.
$A' = \{(x, y)|x > 0, y > 0 \text{ en } x+y < 3\}$.
b Geef door verschillende kleuren of arcering de gebieden A' en B' aan.
c In A wonen 60 mensen per km^2, in B 24 mensen per km^2.
Bereken het gemiddeld aantal inwoners per km^2 in G.

2 Gegeven de functie $f: x \rightarrow -x^2+5x$.
a Los op $f(x) = 4$, b Los op $f(x) > x$, c Licht de uitkomsten van a en b toe aan de hand van de grafiek van f.

3 Van $\triangle\ ABD$ is $AB = AD = 5$ en $BD = 6$.
Op de zijden AB en AD liggen opvolgend de punten P en S zodanig dat $AP = AS$.
Men spiegelt de punten A, P en S in de lijn BD, waarbij de beeldpunten opvolgend C, Q en R worden genoemd.
a Toon aan dat $ABCD$ een ruit is.
b Toon aan dat $PQRS$ een rechthoek is.
c Beschrijf een tweede transformatie welke $\triangle\ APS$ afbeeldt op $\triangle\ CQR$.

d Het snijpunt van AC en PS noemt men T.
Stel de lengte van AT gelijk aan x.
Druk de lengten van PQ en PS en de oppervlakte van $PQRS$ uit in x.
Bereken de grootste waarde die deze oppervlakte kan aannemen.

4 Van een balk $ABCD . EFGH$ is $AB = 8$, $BC = 4$ en $AE = 4$.

a Toon aan dat $\triangle BGD$ gelijkbenig is.

b Bereken cos $\angle BDG$.

Kies op ribbe GH het punt P zodanig dat $HP = 5$.

c Toon aan door berekening dat $\triangle BPD$ gelijkbenig is.

d Onderzoek of $\triangle BPD$ scherp, recht of stomp is.

Nederlandse vereniging van wiskundeleraren

Wiskobas

Door omstandigheden zullen de in het juli-nummer van Euclides aangekondigde bijeenkomsten te Meppel, Eindhoven, Haarlem en Breda voorlopig niet gehouden worden. Nadere berichten zullen spoedig worden gepubliceerd.

Liwenagel

Abonnees op Euclides die dit blad ontvangen als lid van Liwenagel, wordt dringend verzocht het abonnementsgeld voor de 46e jaargang zo spoedig mogelijk te voldoen door overschrijving van *f* 7,— (dus niet meer *f* 5.50!!) op postgiro 87185 ten name van de penningmeester van Liwenagel te Heemstede.
Wie aan dit verzoek voldoet en dus niet op een extra aansporing wacht, bespaart zichzelf extra kosten en de penningmeester extra moeite.
Bij voorbaat dank voor de medewerking.

Korrel CLXIII

Is 0 *een natuurlijk getal?*

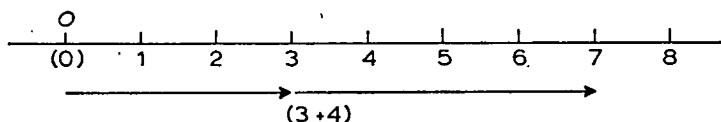
Wiskundig gezien is bovenstaande vraag zinloos. Wel kan men de praktische vraag stellen: welke voor- en nadelen heeft het 0 tot de verzameling van de natuurlijke getallen te rekenen? Anders gezegd: welke van de twee verzamelingen

$$V = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$
$$V' = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

zullen we de verzameling van de natuurlijke getallen noemen?
Als we alleen letten op de volgorde zijn de verzamelingen V en V' isomorf. Dus: $V, >$ en $V', >$ zijn isomorf. Tussen beide is geen principieel verschil en er is geen enkele reden het getal 0 uit te sluiten, als het zich niet afwijkend gedraagt.
Nu gaan we V en V' van een optelling voorzien. Er zijn verschillende manieren deze te definiëren (in de brugklas). Men kan de som van a en b definiëren door twee disjuncte verzamelingen W en U te nemen met a en b elementen en nu af te spreken:

$a+b$ is het aantal elementen van $W \cup U$.

Weliswaar is er nu geen isomorfie meer tussen $V, >, +$ en $V', >, +$, maar van een afwijkend gedrag van 0 is weer geen sprake. De definitie kan men gebruiken voor de optelling in V en evenzo voor de optelling in V'.
We kunnen de optelling ook definiëren door middel van een getallenlijn (fig. 1).



FIGUUR 1 (3+4)

Begin bij O. Ga op de getallenlijn eerst a getallen naar rechts en daarna nog b getallen. (Of: begin bij a en ga b getallen naar rechts.) Het getal, waar we dan komen, is per definitie $a+b$. Ook hier geen principieel verschil tussen de definitie van de optelling in V en in V'.
Ten slotte de vermenigvuldiging. We geven drie definities van het produkt van a en b. Neem twee verzamelingen W en U met a en b elementen. Vorm de verzameling van alle koppels, waarvan het ene element tot W en het andere tot U behoort. Het aantal van deze koppels is per definitie $a \cdot b$. Men ziet direct, dat deze definitie zowel van toepassing is op V als op V'.
Iets huiselijker is de volgende definitie. Neem a rijtjes met elk b elementen. Het totale aantal elementen in deze rijtjes is $a \cdot b$. Ook deze definitie kan zowel in V als in V' gebruikt worden.

En ten slotte: $a \cdot b$ is de som van a getallen, die allemaal gelijk aan b zijn. Deze definitie kan noch in V noch in V' zonder meer gebruikt worden. In V' moeten we toevoegen

$$1 \cdot b = b$$

en in V ook nog

$$0 \cdot b = 0.$$

Een gering verschil uit methodisch oogpunt.
Het weglaten van de 0 uit de natuurlijke getallen noodzaakt ons eerst een definitie te geven van volgorde, optelling en vermenigvuldiging in de verzameling V' en daarna deze definitie uit te breiden, zodra het getal 0 toegevoegd wordt. Uit praktische overwegingen is het dus aan te bevelen 0 tot de natuurlijke getallen te rekenen.
Hoewel we daar met het oog op het onderwijs in de brugklas nog niets aan hebben, is het de moeite waard ook de machtsverheffing te bezien. We definiëren a^b. Neem een verzameling W met a elementen en een verzameling U met b elementen. Onder a^b verstaan we nu per definitie het aantal afbeeldingen van U naar W. Ook deze definitie kan zowel in V als in V' toegepast worden. In V vinden we:

$$0^b = 0,\ a^0 = 1 \text{ en in het bijzonder } 0^0 = 1.$$

P. G. J. Vredenduin
Oosterbeek.

Staatsexamen H.B.S. - 1969
Uit het examenverslag

Wiskunde

Schriftelijk

h.b.s.-A. De sub-commissie heeft de indruk, dat het schriftelijk examen minder goed is gemaakt dan in vorige jaren. Het aantal kandidaten, dat zich alleen voor algebra, of alleen voor meetkunde heeft geprepareerd, lijkt toe te nemen.

Mondeling

Vele kandidaten tonen ontstellend weinig begrip bij het uitvoeren van aangeleerde automatismen. Het tekenen van grafieken van functies, het toepassen

van formules in algebra en planimetrie, het oplossen van vergelijkingen zijn voor veel kandidaten uitsluitend handelingen, uitgevoerd zonder enig begrip. De sub-commissie meent te kunnen constateren, dat steeds meer kandidaten menen het examen wiskunde totaal onvoorbereid te kunnen komen afleggen. Het doet de sub-commissie genoegen te kunnen opmerken, dat de goniometrie beter werd gekend dan in voorafgaande jaren.

Algebra

Schriftelijk

h.b.s.-B. De resultaten van het schriftelijk examen liepen dit jaar zeer uiteen: naast diverse uitstekende cijfers waren er evenveel extreem lage scores. Het behaalde gemiddelde lag aanzienlijk lager dan in 1968. Bij de meeste kandidaten werd het eindresultaat sterk gedrukt door onnauwkeurig vermelden of zelfs geheel weglaten van voorwaarden.
In opgave I wordt 3^x gelijk gesteld aan y; de voorwaarde $y > 0$ wordt òf niet genoemd òf verder niet gebruikt.
In opgave II wordt $f'(x) = \frac{1}{2}|x|+1$ gesplitst in twee delen, zonder de condities $x \geqq 0$, resp. $x < 0$ te gebruiken.

Mondeling

Bij het onderzoek van functies constateert de subcommissie:
a De kandidaten zijn wel bedacht op existentie-voorwaarden, maar vermelden deze niet nauwkeurig: zo wordt gezegd van $\sqrt{a}$: existentie-voorwaarde is $a > 0$; daarentegen van log a: existentievoorwaarde is $a \geqq 0$.
b De kandidaten weten wèl, dat het bepalen van uiterste waarden „iets met differentiëren te maken heeft", maar blijven meestal steken bij $f'(x) = 0$, alsof dit nodige en voldoende voorwaarde voor aanwezigheid van een extreme waarde zou zijn.
De reeds door deze subcommissie aanbevolen methode van tekenonderzoek van $f'(x)$ in plaats van het gebruik van de tweede afgeleide – mislukt vaak, omdat de kandidaat geen verband weet te leggen tussen $f'(x)$ en de raaklijn aan de grafiek van f.
c Het oplossen van ongelijkheden zelfs van kwadratische, geschiedt zeer gebrekkig; ook hier vaak geen verband met de grafiek.
d Het constateren (en bewijzen) van symmetrie in een grafiek blijkt niet mee te vallen.
e Het tekenen van grafieken en samengestelde functies zoals 2^{-x^2+4x-3} of $\sqrt{x^2-7x-30}$ levert grote moeilijkheden op.
Wat betreft het onderwerp rijen merkt de subcommissie op, dat het begrip sommeerbaarheid te zeer verbonden is met de *meetkundige* rijen, alsof andere dan meetkundige rijen niet sommeerbaar zouden kunnen zijn.

Als definitie van sommeerbaarheid van een rij dient gegeven te worden $\lim_{n\to\infty} s_n$ bestaat en niet $-1 < r < 1$; maar ook niet $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$.
Aanbevolen wordt ook een enkele rij te behandelen die noch rekenkundig, noch meetkundig is bijvoorbeeld $t_n = \frac{1}{n}$.

Stereometrie

Schriftelijk

h.b.s.-B. Het schriftelijk examen bood ider, die zich goed had voorbereid ruimschoots kans op een voldoende. De hieronder volgende bemerkingen zijn van toepassing op de opgaven van het schriftelijk examen.

1 Voor de bepaling van de afstand van twee kruisende lijnen wordt zelden de volgende methode toegepast: zijn a en b twee kruisende lijnen, kies vlak $x \perp a$; de projectie van b op x is b'; a snijdt x in A: nu is $d(a,b) = d(A,b')$. Deze methode geeft bijna altijd eenvoudig en vlug het gewenste resultaat. Ook in opgave 1B.

2 Soms is men al te beknopt. Zo werd meer dan eens volstaan met '$\alpha = 60°$' bij het maken van opgave 2a.

3 Zeer veel kandidaten voerden de in opgave 2c gevraagde constructie uit in een figuur, waarin $\triangle$ *TKL* niet werd voorgesteld door een gelijkzijdige driehoek; meestal tekenden zij dan in vlak *TKL* tóch zonder meer een rechte hoek op ware grootte.

4 Veel kandidaten kozen bij het maken van opgave 3b een grondvlak en namen vervolgens als hoogte de lengte van een willekeurig lijnstuk. Bijna alle kandidaten die opgave 3b wél goed maakten, gebruikten de verhouding der inhouden van de piramiden *T.ADE* en *T.ABC*.

5 Het meest gebruikelijke bewijs voor de loodrechte stand van lijn en vlak wordt soms niet gekend. Nog altijd gebruiken velen op onverantwoorde wijze twee loodrechte vlakken.

6 De kandidaten realiseren zich vaak te weinig, dat de stereometrie voortbouwt op wat zij in de vlakke meetkunde hebben bestudeerd, maar dat het vlak als nieuw begrip optreedt en dat in een vlak de planimetrische stellingen gelden. Mede hierom gaat het definiëren en toepassen van begrippen als kruisende lijnen, hoek van twee lijnen, hoek van twee vlakken, dikwijls moeizaam. Hetzelfde geldt voor het construeren van punten en lijnen, die aan bepaalde eisen moeten voldoen.

7 De kennis van de eigenschappen van het viervlak is bij vele kandidaten onvoldoende.

Mondeling

h.b.s.-B. De resultaten van het mondeling zijn vrij slecht te noemen. Slechts een gering aantal kandidaten kon hun dikwijls al lage cijfer voor het schriftelijk gedeelte door het afleggen van een redelijk mondeling verhogen.
In de eerste plaats moet worden opgemerkt, dat zich bij *alle* kandidaten een ontstellend tekort aan elementaire *planimetrische* kennis openbaarde.
Betreffende de rechthoekige driehoek bijvoorbeeld, bleek de stelling van Pythagoras het uiterste te zijn, waartoe de kandidaten konden komen, dat men met het omgekeerde van deze stelling kan aantonen, dat twee rechte lijnen elkaar loodrecht snijden, was voor de meesten maar een duistere zaak. De stelling over de bissectrice van de hoek van een driehoek werd niet gekend en ook met de produkten van lijnstukken in een cirkel ging het niet best.
Slechts weinig kandidaten waren in staat zonder hulp een dragelijke projectiefiguur te tekenen van de een of andere stereometrische structuur en daarna door een goede redenering de aanwezige relaties aan te tonen.
Vooral zij opgemerkt, dat men steeds weer *de loodrechte stand van twee kruisende rechte lijnen wilde aantonen met behulp van twee loodrecht op elkaar staande vlakken.*
Aan de bestudering van de bol, maar vooral van de kegel en de cilinder had men weinig tijd besteed.
Tenslotte ook het slechte gebruik van de wiskunde-taal mag hier niet onvermeld blijven: 'midden' en 'helft' worden vaak verward, men sprak van het middelpunt van een lijnstuk; twee lijnstukken zijn 'hetzelfde' i.p.v. 'even-lang'; driehoeken waren 'gelijk' i.p.v. 'congruent'. P is het punt waar de rechte a, de rechte b 'raak'! een punt bijv. lag vaak 'op' een vlak.

Goniometrieen Analytische Meetkunde

Analytische Meetkunde

Mondeling

h.b.s.-B. Bij het mondeling examen in de analytische meetkunde bleek herhaaldelijk, dat de kandidaten vaak neiging hebben om maar formules te hanteren (soms slecht gememoriseerd) zonder veel of zelfs zonder enig begrip van wat zij betekenen. Verbazingwekkend was het dat verscheidene kandidaten de term 'top van een ellips' niet bleken te kennen.
Hyperbolen en ellipsen, anders dan met (0,0) als middelpunt, zijn niet voldoende bekend. Vooral raaklijnen en poollijnen hierbij stellen de meeste kandidaten voor bijna onoverkomelijke problemen. Hetzelfde geldt voor parabolen waarvan de top niet in de oorsprong ligt en orthogonale hyperbolen gegeven door $xy = k$.
Het formuleren en het gebruik van termen is meestal onvoldoende of slecht. Bijv.: een vergelijking wordt 'uitgescholden' voor een functie. Een parameter heet 'de onbekende'. Elimineren van een parameter noemt men: 'oplossen van

de onbekende' enz. Soms neemt dit zelfs zulke vormen aan, dat met de beste wil niet is in te zien, dat de kandidaat iets goed bedoelt en het alleen maar slecht formuleert.
Vele kandidaten raken tijdens het bepalen van de verzameling van een variabel punt het spoor bijster. Men wil bijv. lopende coördinaten invoeren als parameters geëlimineerd moeten worden. De vraag, welke betrekkingen en/of vergelijkingen nodig zijn om tot de verzameling van een variabel punt te komen, bleek voor vele kandidaten buitensporig lastig te zijn.
Eigenlijk spruiten alle moeilijkheden (behalve die op rekenkundig gebied, deze kunnen door oefening worden overwonnen) voort uit het feit, dat men, alvorens aan een probleem te beginnen, geen 'plan de campagne' opmaakt en zich vervolgens daaraan houdt.

Goniometrie

Tot veel kandidaten was het niet doorgedrongen, dat bij het schetsen van grafieken van goniometrische functies (voorbeeld $x + \cos x$) de eenheid voor het tekenen van functiewaarden vastgelegd is als op de x-as de lengte van bijvoorbeeld het interval [0,II] aangenomen is. De meeste kandidaten aan wie dit werd gevraagd wisten niet waarom bij goniometrische functies de radiaal als hoekmaat moet worden gebruikt en deden het dan dus ook niet. Desgevraagd waren ze wel bereid graden om te rekenen in 'pie' (formulering van een kandidaat) maar ze beschouwden het kennelijk als een lastige hobby van de heren examinatoren.
Bij het onderzoek naar de extremen van een goniometrische functie werd gelukkig niet vaak gebruik gemaakt van de tweede, maar van het tekenverloop van de eerste afgeleide van deze functie.
Het gebruik van de kettingregel gaf voor te veel kandidaten nog steeds moeilijkheden, terwijl ook menige kandidaat niet op de hoogte was van het feit hoe men de primitieve functie bepaalt van $\sin^2 x$ en $\cos^2 x$.
Het lijkt de subcommissie niet overbodig om op te merken, dat zeer vele van de gemaakte opmerkingen naar aanleiding van de mondelinge examens eveneens door de kandidaten ter harte moeten worden genomen als ze zich voorbereiden op het schriftelijk gedeelte van dit examen.

Boekbespreking

Ir. C. Kooy, *Toepassing van de Laplace-transformatie,* Uitg. Malmberg, 's-Hertogenbosch, 110 pag.

Het onderschrift van de titel luidt: Wiskundige metoden in de electrotechniek. Hieruit blijkt wel, dat het werk in het bijzonder van belang is voor elektrotechnici. De wiskundige zal van de methoden kunnen genieten, maar de vele typisch technische toepassingen zullen hem minder bezig houden. De fysicus, vooral degene die een theoretische belangstelling heeft, zal hier veel wetenswaardigs in aantreffen. Het boek is duidelijk en beknopt. Het snelle oplossen van de diverse lineaire differentiaalvergelijkingen is verrassend. Ik meen, dat Heaviside reeds over dit soort systemen beschikte.
Mede door het grote aantal vraagstukken (voorzien van antwoorden) is het doorwerken een genoegen.

B. Groeneveld

Watson Fulks, *Advanced Calculus, an introduction to analysis,* second ed., 597 blz., prijs 105/-, uitg. John Wiley and Sons, Inc, New York, London, Sydney, Toronto.

Dit lijvige boek bestaat uit drie delen.
Deel I 'Calculus of one variable' behandelt de beginselen der analyse met beperking tot functies van één veranderlijke. Het eindigt met de elementaire transcendente functies en de behandeling van de algemene middelwaardestelling en de formule van Taylor met restterm.
Het middendeel 'Vectorcalculus' geeft een samenvattende inleiding in de vectorrekening uitlopend in de eerste beginselen van de differentiaalmeetkunde. Nu volgt een hoofdstuk dat na introductie van de belangrijkste topologische grondbegrippen, functies van meer veranderlijke als vectorfuncties invoert. Hierna volgen o.a. continuiteit, differentieerbaarheid, transformaties, meervoudige integralen, lijn- en oppervlakteintegralen.
Deel III 'Theory of convergence' geeft genoemde theorie toegepast op rijen en oneigenlijke integralen. Ik volsta met de opsomming van enkele onderwerpen uit dit slotdeel: taylorreeksen, gamma- en betafuncties, fourierreeksen.
De schrijver van dit zeer aantrekkelijk uitgevoerde werk is er in geslaagd moeilijke onderwerpen zo te bespreken, dat er een helder en prettig leesbaar boek is ontstaan. Veel vraagstukken ingedeeld naar moeilijkheid in A-, B- en C-oefeningen verhogen de aantrekkelijkheid. Letterlijk en figuurlijk een kostbaar bezit.

L. v. d. Zijden

H. Willerding, S. Hoffman, *Modern intermediate Algebra,* John Wiley and Sons, Inc., New York, 1970, 308 blz., 70/–.

Na een korte inleiding over verzamelingen, in hoofdzaak de 'set-notatie', passeren de verzamelingen **N**, **G**, **Q** en **R** de revue. Opgesomd worden de axioma's waaraan de operaties $+$ en $\times$ voldoen. Ook de orde-relatie wordt geaxiomatiseerd.
Na eenvoudige voorbeelden en opgaven wordt de 1e graads vergelijking en ongelijkheid besproken. Hierna volgen m.b.v. cartesiaans produkt de functies en relaties. De complexe getallen worden als geordende reële getallenparen geïntroduceerd, waarna de 2e graads vergelijkingen en ongelijkheden volgen.

Twee lineaire vergelijkingen met twee variabelen werden opgelost m.b.v. determinanten van de 2e orde, die zonder theorie worden ingevoerd.
De determinant van de orde 3 wordt gedefinieerd door de ontwikkeling naar de elementen van de eerste rij. Medegedeeld wordt, dat de regel van Cramer de oplossing geeft.
Tenslotte volgen nog de rekenkundige en meetkundige rijen en reeksen en de logaritmen.

Burgers

Ir. Th. Scharten, *Toepassing van de complexe rekenwijze*, Uitg. Malmberg, 's-Hertogenbosch, 109 pag.

Dit boek is voor wiskundigen van betrekkelijk weinig belang. De 'raadselachtige' complexe getallen worden toegepast op het reële terrein van de electrotechniek. Nu deze raadselachtigheid niet meer bestaat is de verrassing ten dele verdwenen.
Het boek is bedoeld voor elektrotechnici en fysici. Een groot aantal vraagstukken verhoogt de waarde van het boek.

B. Groeneveld

H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, second edition; John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, Toronto, 1969, XIX+469 pag., 5/-/-.

De auteur bracht enkele kleine veranderingen aan t.o.v. de in 1961 verschenen eerste druk. Deze 'inleiding tot de meetkunde' is een boek, dat boeit van het begin tot het einde. Het begin: driehoeken in de 'gewone' elementaire meetkunde, regelmatige veelhoeken, isometrie, enz. enz.; het einde: een en ander uit de differentiaalmeetkunde, topologie, vierdimensionale meetkunde. Het is een speurtocht door vele vormen, waarin meetkunde wordt beoefend en het treft, hoe de schrijver er in ieder hoofdstuk steeds weer in slaagt de lezer door een geniale keuze van de problemen en voorbeelden intensief bezig te houden. De vele vraagstukken, kennelijk ook weer uitgekozen door een fijnproever, geven het werk extra waarde en ook als de lezer geheel op de hoogte meent te zijn wordt hij getroffen door de aangeboden oplossing, steeds een der meest elegante, die bekend zijn.
Het is moeilijk in een korte bespreking recht te doen aan een zo rijk gevarieerd boek als dit. Er is m.i. een duidelijke tendens waar te nemen bij de instructie van beginnende studenten de transformatie als een van de belangrijkste meetkundige begrippen op de voorgrond te schuiven; aan de andere kant kan het werk uitstekend dienst doen als bloemlezing voor ingewijden.

H. W. Lenstra

Boeken-aanwinsten

Mathematisch Instituut, Universiteitscentrum Paddepoel, Groningen
Periode april 1969 t/m november 1969

Bréard, C.: Analyse. Parijs, 1968.

Bréard, C.: Mathématiques. 2 tom. Parijs, 1967.

Castelnuovo, E.: Didaktik der Mathematik. Frankfurt/M, 1968.

Davis, R. B.: Discovery in mathematics. 1964. Item. Students discussion guide. Palo Alto, 1964.

Davis, R. B.: Explorations in mathematics. Palo Alto, 1966.

Dienes, Z. P.: Building up mathematics. London, 1969.

Enseignement (L') des mathématiques. II. par C. Gattegno e.a. Neuchatel, 1965.

Evaluation in mathematics. 26th yearbook of the national council of teachers of mathematics. Washington, D.C., 1965.

Fehr, H. F., L. N. H. Bunt and G. Grossman: An introduction to sets, probability and hypothesis testing. 1968.

Felix, L.: Mathématiques modernes. Enseignement élémentaire, Parijs, 1965.

Gelder, L. van: Grondslagen van de rekendidaktiek. Groningen, 1967.

Insights into modern mathematics. 23rd yearbook of the national council of teachers of mathematics. Washington D.C., 1966.

Jung, W.: Logische Aspekte der Schulmathematik. Frankfurt/M, 1968.

Lietzmann, W.: Methodik des mathematischen Unterrichts. Heidelberg, 1968.

Papy, G.: Le premier enseignement de l'analyse. Brussel, 1968.

Rainich, G. Y., and S. M. Dowdy: Geometry for teachers. New York, 1968.

Sherlock, A. J.: An introduction to probability and statistics. Londen, 1969.

Davis, R. B.: Explorations in mathematics. A text for teachers. Palo Alto, 1967.

Fremont, H.: How to teach mathematics in secondary schools. Philadelphia, 1969.

Bouqué, E.: Boole'se algebras. Gent, 1968.

Chrestenson, H. E.: Mappings of the plane. With applications to trigonometry and complex numbers. San Francisco, 1966.

Dienes, Z. P., et E. W. Golding: La géométrie par les transformations. I, II. Parijs, 1967.

Faber, K.: Geometrie. 2 Bde. Stuttgart 1968–1969.

Friis, J. S.: Transformation geometry. Oxford, 1966.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek.

246 Men heeft vier voorwerpen van 9 gram en vier van 10 gram. Bepaal door middel van een brieveweger het gewicht van de acht lichamen in maximaal vijf wegingen (vgl. opgave 244).

247 Gegeven. $a \in \mathbf{Z}^+$, $b \in \mathbf{Z}^+$.
Te bewijzen. max $(a, b) = n \Rightarrow a = b$.
Bewijs. Voor $n = 1$ is de stelling juist.
Onderstel, dat de stelling juist is voor $n = r$. Onderstel verder, dat max $(a, b) = r+1$. Dan is max $(a-1, b-1) = r$ en dus $a-1 = b-1$. Waaruit volgt $a = b$.
(ingezonden door Dr. P. Bronkhorst; ontleend aan Courant-Robbins)

Oplossingen

244 Men heeft vier voorwerpen, die elk 9 of 10 gram wegen. Bepaal met behulp van een brieveweger in drie wegingen de gewichten van de vier voorwerpen.
Noem de voorwerpen *a*, *b*, *c* en *d*. Weeg eerst *a*, *b* en *c* samen. Mochten we vinden

$$a+b+c = 30 \text{ of } a+b+c = 27,$$

dan behoeven we alleen nog maar *d* te wegen.
Onderstel, dat we vinden

$$a+b+c = 29.$$

We wegen dan *b*, *c* en *d* samen. Als we vinden

$$b+c+d = 30,$$

dan is $a = 9$ en $b = c = d = 10$. Vinden we $b+c+d = 28$ dan is $a = 10$ en $d = 9$ en behoeven we alleen nog maar *b* te wegen.
Onderstel echter, dat we vinden

$$b+c+d = 29.$$

Er zijn dan de volgende drie mogelijkheden:

a	*b*	*c*	*d*
9	10	10	9
10	10	9	10
10	9	10	10

Door nu *a*, *b* en *d* samen te wegen, vinden we welk van deze drie gevallen we hebben.
Het geval $a+b+c = 28$ wordt analoog behandeld.

245 Van hoeveel getallen kleiner dan 10^6 is de som van de cijfers gelijk aan 17?
Bekend is het volgende probleem. Op hoeveel manieren kunnen we van het punt (0, 0) naar het punt (a, b) gaan $(a, b \in \mathbf{N})$, als we telkens ons 1 naar rechts of naar boven moeten bewegen. Noem dit aantal $f(a, b)$. Dan is

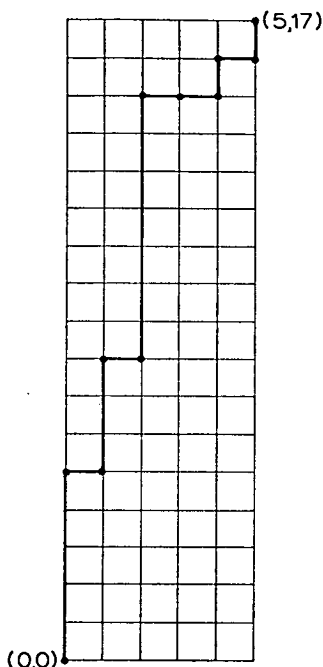
$$f(0, b) = f(a, 0) = 1,$$

$$f(a+1, b+1) = f(a, b+1) + f(a+1, b)$$

en dus

$$f(a,b)=\binom{a+b}{a}.$$

Een getal, dat aan de vraag voldoet, is 537011. We kunnen dit getal als volgt representeren.



Uitgaande van (0, 0) zijn we eerst 5 naar boven gegaan, toen 1 naar rechts, daarna 3 naar boven en 1 naar rechts, 7 naar boven en 1 naar rechts, 0 naar boven en 1 naar rechts, 1 naar boven en 1 naar rechts, en ten slotte 1 naar boven. Met elk getal correspondeert zo een manier om van (0, 0) via stappen naar boven en naar rechts (5, 17) te bereiken. Dit kan op $\binom{22}{5}$ manieren. Nu correspondeert echter niet met elke dergelijke weg een getal. Het getal kan namelijk niet met het cijfer 10, 11, 12, ..., 17 beginnen. Daarmee vervallen alle wegen, waarbij (0, 10) met (5, 17) verbonden wordt. Hun aantal is $\binom{12}{5}$. Omdat dit cijfer ook niet op de 2e, 3e, ..., 6e plaats mag voorkomen, vervallen er $6\binom{12}{5}$ mogelijkheden.

Zodat er overblijven

$$\binom{22}{5}-6\binom{12}{5}=21582.$$

Nieuwe wiskunde-opgaven voor l.o., v.h.m.o., v.w.o.

Dr. W. A. M. Burgers en Drs. B. J. Westerhoff

Nieuwe wiskundeopgaven f 6,75

I.S.B.N. 90.01.18565.7

Deze uitgave bevat naast examenopgaven l.o. en v.h.m.o. een serie nieuwe vraagstukken op het gebied van algebra, analytische meetkunde, stereometrie, vectormeetkunde en planimetrie.

De planimetrie-opgaven zijn alleen bestemd voor hen die het examen wiskunde l.o. wensen af te leggen.

In een aanhangsel worden permutaties en determinanten behandeld, met het oog op stelsels lineaire vergelijkingen en transformaties.

Bestemd voor:
kandidaten voor de examens wiskunde l.o., bovenbouw v.h.m.o. en v.w.o. scholen.

Verkrijgbaar bij de boekhandel en bij de uitgever, postbus 58, Groningen



Wolters-Noordhoff

Vreemde woorden in de sterrenkunde

Het gebruik van vreemde woorden in de wetenschap, zo zegt Prof. Dr. M. G. J. Minnaert in zijn voorrede, heeft zijn kwade, maar ook zijn goede zijde. Het is die kwade zijde, die van de moeilijke toegankelijkheid van een tekst voor de niet-geschoolde lezer, die **Prof. Dr. P. H. van Laer** ertoe bracht zijn
Vreemde woorden in de sterrenkunde *f* 9,25
2e druk ISBN 90 01 52250 5
samen te stellen.

Verkrijgbaar bij de boekhandel en bij de uitgever.



Wolters-Noordhoff

Inhoud